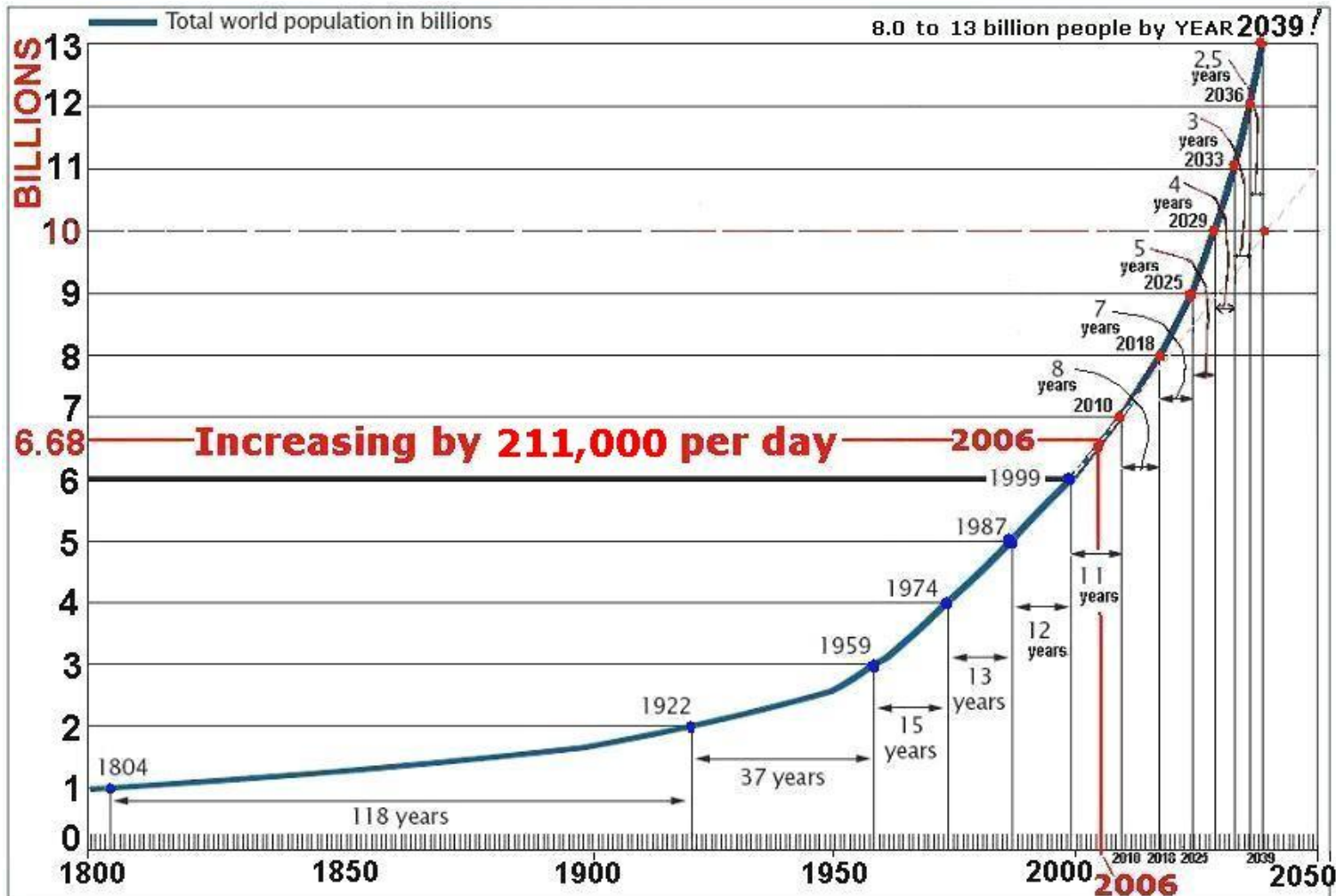


Diferencijalne jednačbe i model populacije

- Svjetska populacija:

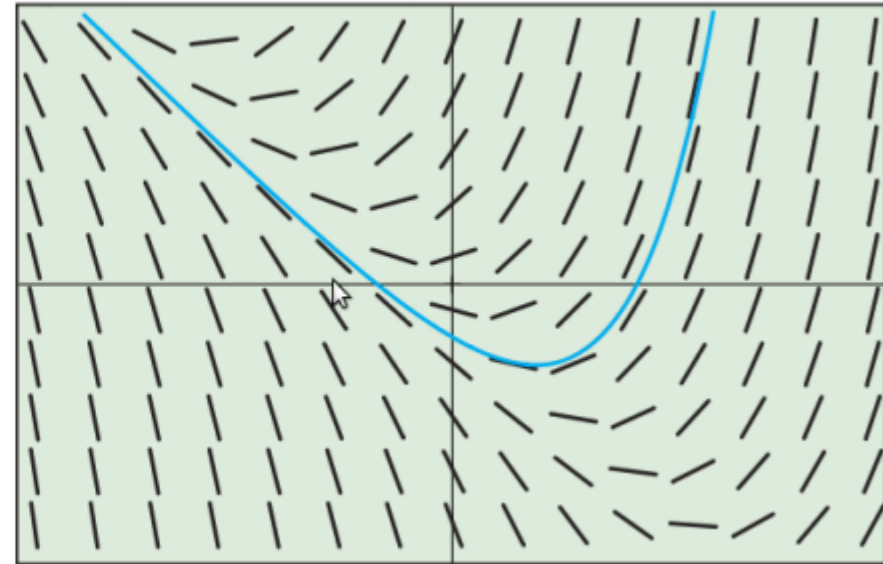
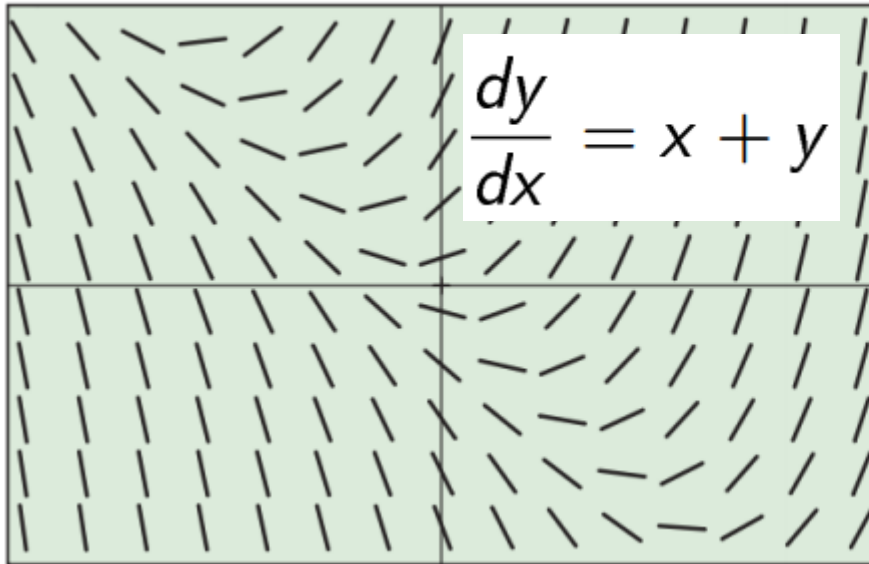
http://en.wikipedia.org/wiki/World_population

<http://matrixgreatestscape.files.wordpress.com/2009/07/worldpopulation.jpg>



Eksponencijalni rast

Diferencijalne jednačbe (DJ)



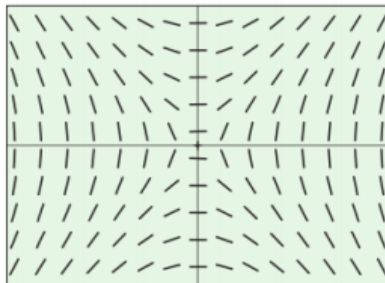
Povežite diferencijalne jednačbe i polja smjerova:

1. $\frac{dy}{dx} = x - y$

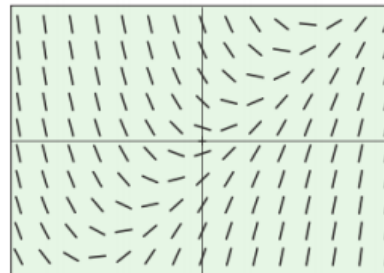
2. $\frac{dy}{dx} = xy$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

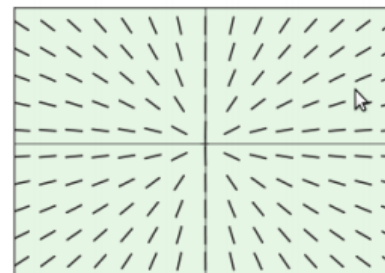
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$



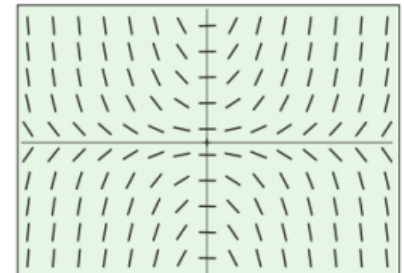
(a)



(b)



(c)



(d)

Numeričko rješavanje DJ

Cilj nam je odrediti rješenje $y(t)$ diferencijalne jednačbe

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

na intervalu $t \in [t_0, t_N]$ koji dijelimo na N vremenskih koraka duljine

$$h = \frac{t_N - t_0}{N}.$$

Ako znamo rubni uvjet

$$y_i \equiv y(t_i = t_0 + ih)$$

rješenje u trenutku $t_{i+1} = t_i + h$ možemo zapisati u obliku

$$y(t = t_i + h) \equiv y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y) dt$$

što znači da počevši od početnog rubnog uvjeta y_0 nakon j sukcesivnih koraka možemo dobiti y_j . Eulerova metoda aproksimira izraz

$$y_{i+1} = y_i + \underbrace{f(t_i, y_i)}_{k_1} \cdot h + \mathcal{O}(h)$$

Diferencijalne jednačbe i rast populacije

- Vremenski kontinuirani eksponencijalni rast
 - ✓ Promjene uzrokuju samo stope nataliteta i mortaliteta.
 - ✓ Zanimareni utjecaji poput borbe za hranu, emigracije, imigracije itd.
 - ✓ Vremenski ovisan broj jedinki $P(t)$.
 - ✓ Brzina promjene (derivacija) populacije proporcionalna je broju jedinki

$$\frac{dP(t)}{dt} \sim P(t)$$

- ✓ Faktor proporcionalnosti (stopa rasta, r)

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t)$$

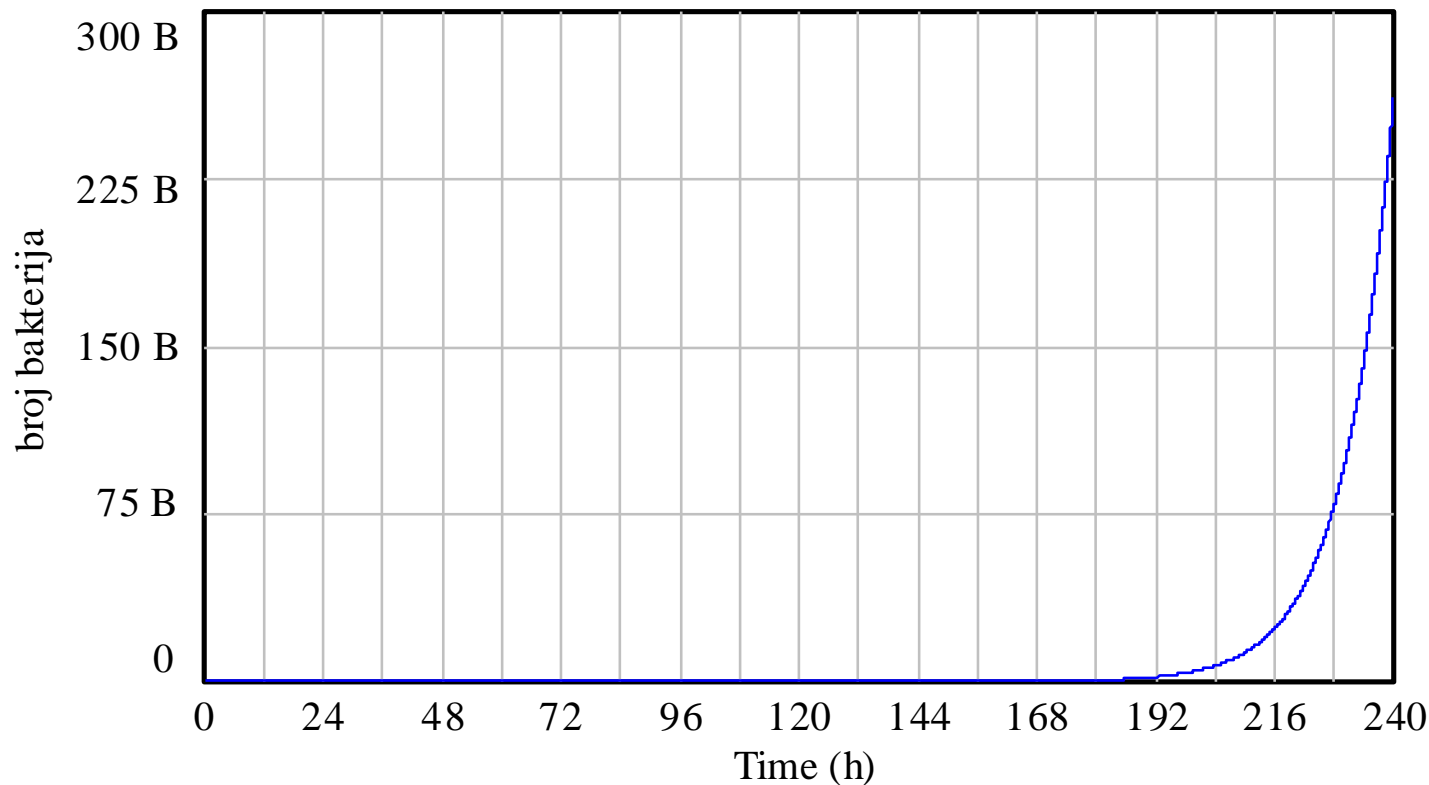
Rast populacije bakterija

3-1: Prikažite ovisnost populacije od 10 bakterija tijekom 10 dana ako se populacija poveća za 10% u sat vremena.

RJ: Diferencijalna jednačina

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t)$$

$$r = 0.1 \text{ h}^{-1}$$



$$T = 10^{12}$$

$$B = 10^9$$

$$M = 10^6$$

Zadatak za vježbu

3-2. Prikažite ovisnost populacije od 1000 jedinki B tijekom 2 h (sata) ako je promjena opisana diferencijalnom jednačinom

$$\frac{dP}{dt} = a \cdot P^2 + b \cdot P + c$$

gdje su

$$a = -0.0003 \frac{1}{B \cdot h}$$

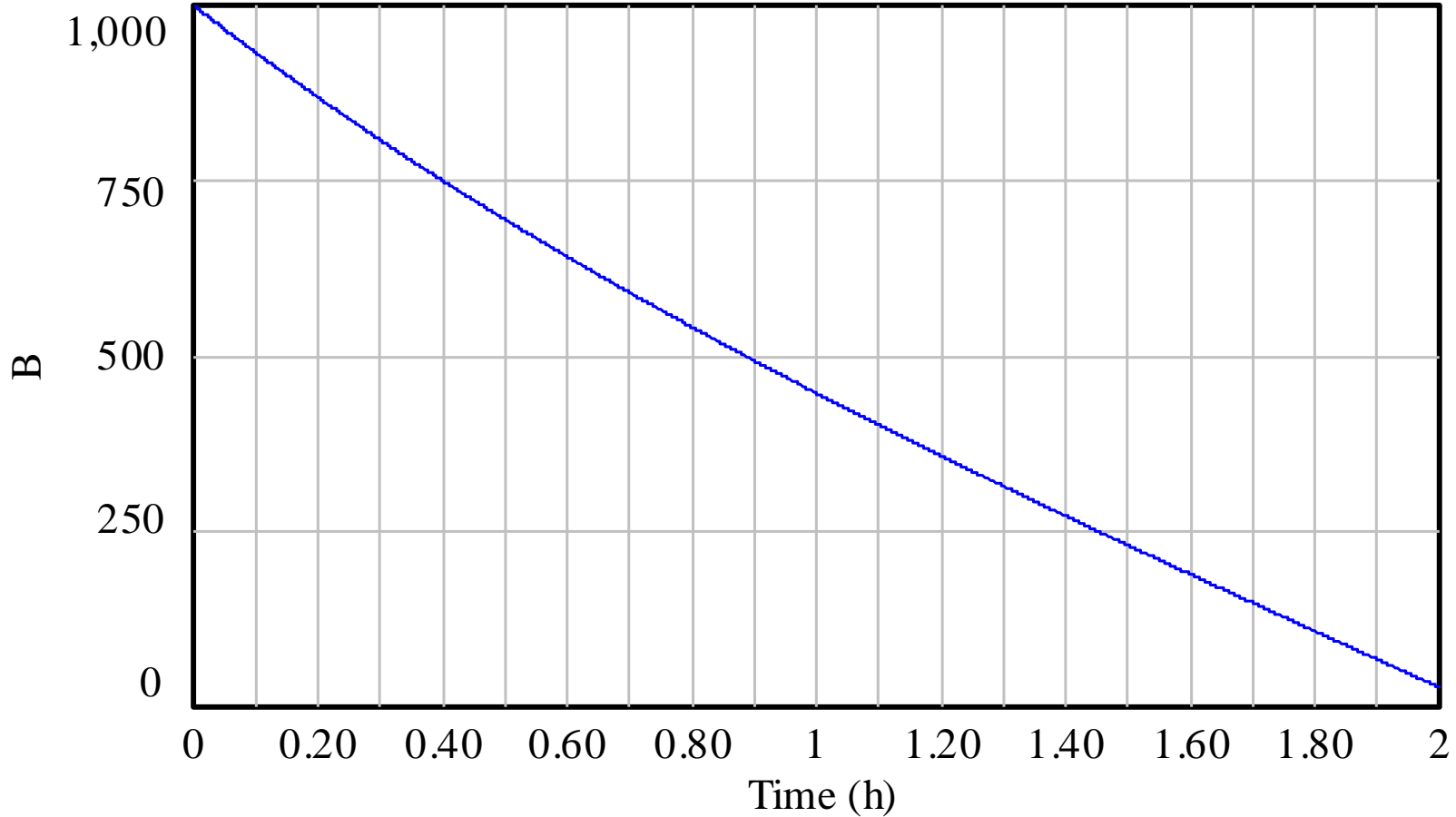
$$b = 0.005 \frac{1}{h}$$

$$c = -400 \frac{B}{h}$$

Obratite pozornost na utjecaj vremenskog koraka na rezultate.

Prikaz populacije vrste B tijekom 2 sata:

P



P : Current

Zadatak za vježbu

3-3. Prikažite ovisnost populacije od 10000 BJ (br. jedinki) tijekom 2 h (sata) ako je promjena populacije opisana diferencijalnom jednačinom

$$\frac{dP}{dt} = a \cdot P^2 + b \cdot P + c$$

gdje su

$$a = -0.01 \frac{1}{\text{BJ} \cdot \text{h}}$$

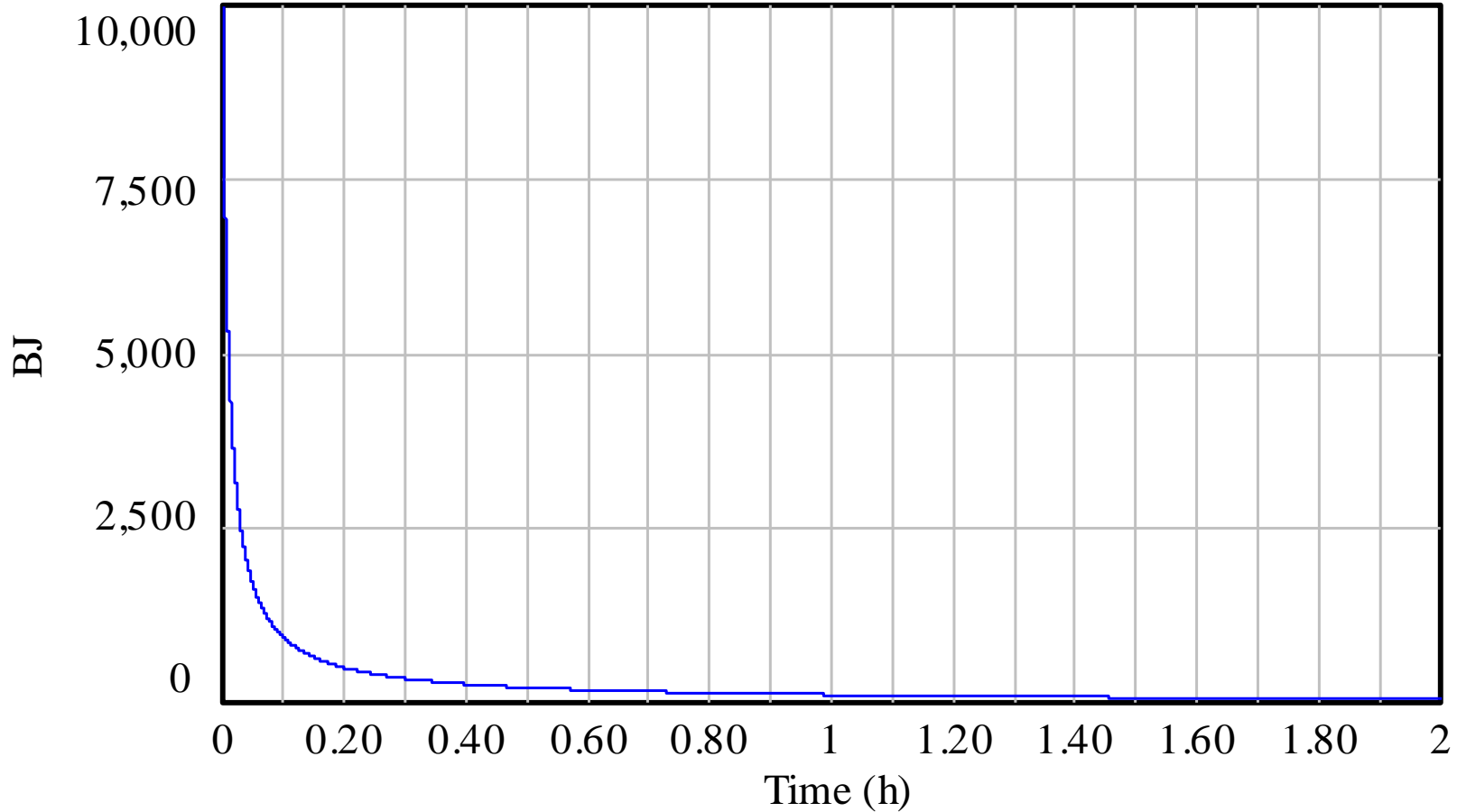
$$b = 0.5 \frac{1}{\text{h}}$$

$$c = -40 \frac{\text{BJ}}{\text{h}}$$

Obratite pozornost na utjecaj vremenskog koraka na rezultate.

Prikaz broja jedinki (BJ) tijekom 2 sata:

P



P : Current

Zadatak za vježbu

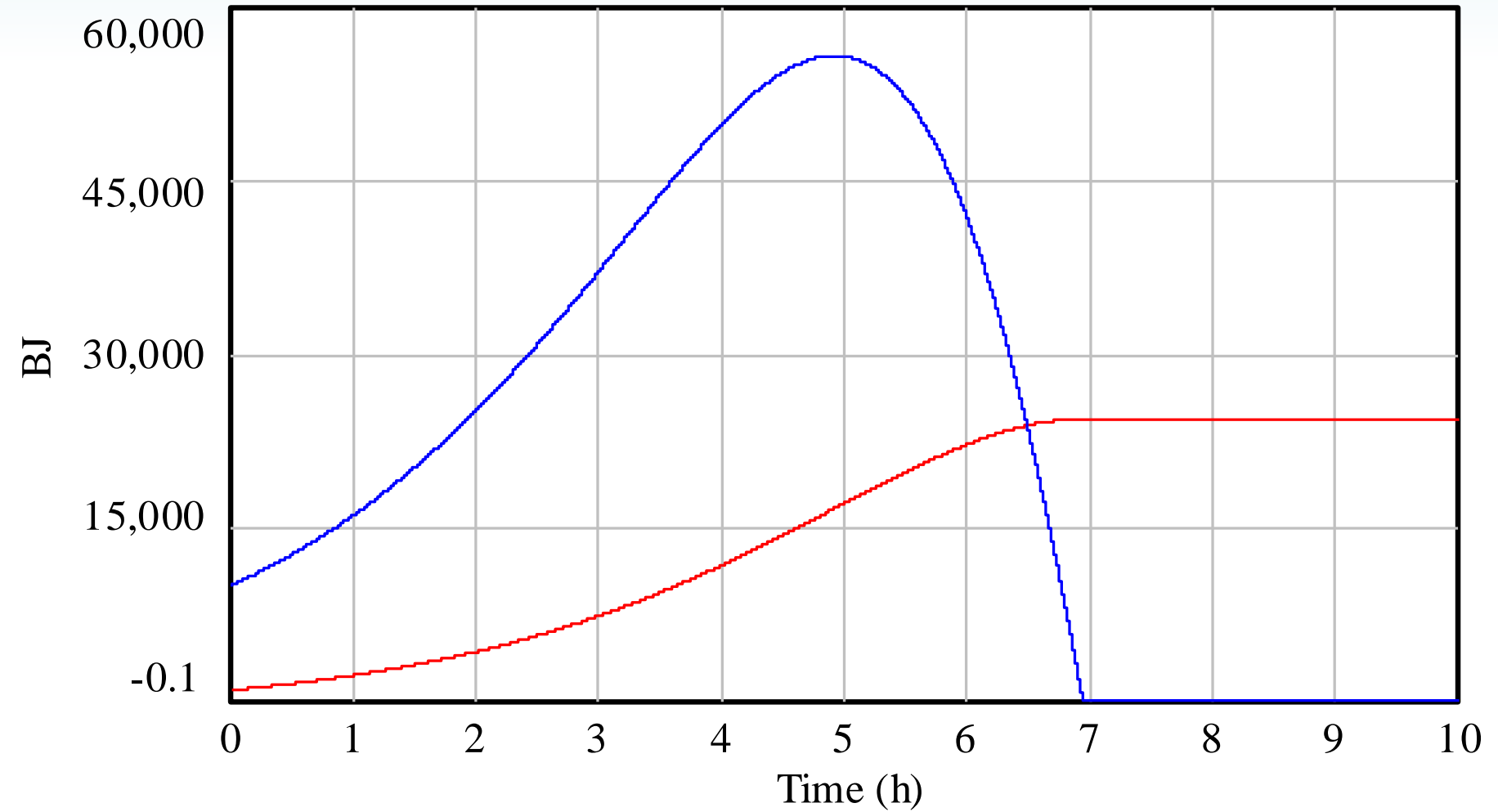
3-4. Promotrite populaciju plijena P i predatora $P2$. Napišite diferencijalne jednačbe koje opisuju brzine promjena populacija ako svakih sat vremena:

- odseli se 40 P zbog straha od $P2$;
- nestane dio od P zbog susreta s predatorom $P2$ koji eliminira $0.01\% P2 * P2$ jedinki P
- kao rezultat ostalih faktora P se poveća za 50% ;
- populacija $P2$ naraste za $10\%P$.

Stope rasta i eliminiranja populacije $P2$ modificirajte i komentirajte njihove utjecaje na populacije.

Obratite pozornost na utjecaj vremenskog koraka na rezultate.

Za $P_2(0)=1000$ BJ; $P(0)=10000$ BJ



P : Current 

P2 : Current 